

MODELADO NUMERICO DE LA PROPAGACIÓN DE FISURAS POR FATIGA EN SÓLIDOS MICROFISURADOS

J. E. Ortiz, A. P. Cisilino, y J. L. Otegui

División Soldadura y Fractura - Intema
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar Del Plata – CONICET
Av. Juan B. Justo 4302 (7600) Mar Del Plata, Argentina
e-mail: jortiz@fi.mdp.edu.ar

Se presenta un estudio numérico y fractomecánico del mecanismo de propagación de fisuras por fatiga en materiales micro – fisurados. La propagación de fisuras es modelada a través de un análisis incremental basado en el método de elementos de contorno (BEM). Esta metodología es efectiva para modelar fisuras múltiples, su interacción con microfisuras y nódulos en el material, y el efecto de las microfisuras sobre la propagación de la fisura principal. Los resultados concuerdan con las observaciones experimentales y validan algunos mecanismos de fractura propuestos en la literatura.

A numerical fracture mechanics study of the mechanism of fatigue crack growth in micro cracked materials is presented. The propagation of cracks is modeled through an incremental analysis based on the boundary elements method (BEM). This methodology is effective to model multiple cracks, their interaction with micro cracks and nodules in the material, and the effect of the micro cracks on the propagation of the main crack. The results agree with experimental observations and validate some fracture mechanisms proposed in the literature.

I. INTRODUCCIÓN

El proceso de aumento de tenacidad por microfisurado es frecuente en materiales metálicos, cerámicos y rocas. El mismo es de relevancia para cualquier teoría concerniente a la fractura en microescala. La cuantificación del efecto de apantallamiento de la zona microfisurada sobre el comportamiento de una fisura principal ha sido estudiado por diversos investigadores¹⁻⁶. El problema ha sido atacado utilizando dos estrategias principales: la solución de los campos elásticos considerando una descripción detallada de la posición, tamaño y orientación de cada microfisura^{5,6}, y la sustitución de la zona de daño por un medio elástico equivalente¹⁻⁴. Ambas metodologías poseen sus limitaciones. En el primer caso la limitación está dada por el número de fisuras que pueden ser incluidas en el análisis, el que queda acotado por los recursos computacionales. En el segundo caso la dificultad está dada en conocer la relación entre las propiedades elásticas del material microfisurado y la densidad y distribución de las microfisuras.

En las fundiciones nodulares austemperizadas (ADI) se observa que la propagación de una fisura por fatiga involucra la iniciación y propagación de numerosas microfisuras iniciadas en los nódulos de grafito⁵. La interfaz grafito-matriz en estos materiales es sumamente irregular, con múltiples vértices agudos, esto es, numerosos concentradores de tensiones que en algunos casos constituyen inminentes microfisuras que emanan de los nódulos. Al mismo tiempo, resultados experimentales demuestran que la tasa de avance de fisuras por fatiga y el umbral efectivo de propagación para el ADI son menores que los de un acero homogéneo de resistencia comparable.

En el presente trabajo se presenta un estudio numérico y fractomecánico del mecanismo de propagación de fisuras por fatiga en materiales microfisurados aplicado al ADI. El mismo consiste de dos partes principales. La primera se analiza mediante un modelado numérico de Elementos de Contorno (BEM) el mecanismo de propagación y el campo de tensiones en la matriz del material. En la segunda parte se estudia el efecto de las microfisuras sobre la tasa de propagación.

Se señala que los modelos están en dos dimensiones, aunque el problema original podría llegar a involucrar aspectos en tres dimensiones

II. FORMULACION NUMERICA

El modelado numérico del crecimiento de fisuras por fatiga requiere de la capacidad de predecir la dirección y el tamaño de la extensión de fisura por cada ciclo de carga, así como actualizar el modelo numérico teniendo en cuenta el cambio de la geometría de la fisura. El método dual de los elementos de contornos (DBEM) es una técnica numérica muy bien establecida en el campo de la mecánica de fractura, elimina los problemas de remallado, que son típicos de los métodos de dominios y otras formulaciones de elementos de contorno. Los problemas de fisuras a modo mixto de carga pueden resolverse con el DBEM en una formulación de una sola región, donde la ecuación integral de desplazamientos es aplicada en una de las caras de la fisura y la ecuación integral de tracciones en la otra. El proceso de crecimiento de fisura es eficientemente simulado mediante el análisis incremental, donde las extensiones de fisura son modeladas añadiendo nuevos elementos discontinuos en el vértice de la fisura. Esta simple estrategia es robusta y permite al DBEM modelar en

forma efectiva problemas de fisuras embebidas y de borde; los vértice de fisura y las fisuras con quiebres no requieren tratamiento especial alguno. Para detalles adicionales sobre la formulación del DBEM y su implementación el lector puede referirse los trabajos de Portela⁸ y Ortiz⁹.

III. MECANICA DE PROPAGACION DE FISURAS POR FATIGA

La falla por fatiga de un componente estructural toma lugar por crecimiento progresivo de una fisura o defecto presente en el material desde dimensiones subcríticas a un tamaño crítico. Las fórmulas de propagación de fisuras expresan la relación entre la tasa de avance de la fisura, da/dn , y los parámetros de gobierno, tales como el rango del factor de intensidad de tensiones, $DK=K_{max}-K_{min}$, la razón de carga $R=K_{max}/K_{min}$ y las propiedades del material. La propagación de una fisura por fatiga muestra tres comportamientos bien diferenciadas. En la *Región I* región de umbral, la que la velocidad de crecimiento de la fisura decrece cuando el valor DK disminuye, hasta un valor de umbral denotado por DK_{th} , bajo el cual las fisuras no propagan. La *Región II* es una zona intermedia de propagación estable, mientras que en la *Región III* las fisuras tiene lugar la fractura rápida del material¹⁰. Las relaciones entre la tasa de propagación y el rango del factor de intensidad de tensiones son de naturaleza empírica. Existen muchas expresiones para representar el referido comportamiento, en este trabajo se uso la relación propuesta por Klesnil y Lukas¹¹:

$$\frac{da}{dn} = C \cdot (\Delta K^m - \Delta K_{th}^m) \quad (1)$$

donde C y m son constantes de material. La expresión (1) describe la propagación de fisuras por fatiga para la *Regiones I* y *II*. Si las caras de la fisura aun están en contacto después del inicio del ciclo de carga de fatiga o si éstas se cierran antes de completar la descarga, la fisura ha experimentado el llamado efecto de cierre parcial o más conocido como closure¹². Se entiende que la fisura propagará solamente cuando está totalmente abierta, por ello la fuerza impulsora para la propagación de fisura es reducida. El rango del factor de intensidad de tensiones efectivo es definido como $\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{op} = U \cdot \Delta K$ donde K_{op} corresponde al valor de K para el cual el vértice de fisura se abre y U es el llamado razón de "closure". Es importante señalar que mientras que el nivel de closure puede ser significativa para fisuras largas, para fisuras cortas el "closure" es nulo¹⁰.

IV. RESULTADOS Y DISCUSION

Modelado del campo de tensiones

Una serie de modelos reproduciendo la microestructura ADI sin fisuras fueron preparados para estudiar el campo de tensiones. El objetivo de este análisis

fue investigar tres características principales:

- La distribución de tensiones sobre la frontera de los nódulos.
- El campo de tensiones en la vecindad de los nódulos.
- El campo de tensiones a lo largo de una recta perpendicular a la carga aplicada.

La estructura del ADI puede ser caracterizada utilizando dos parámetros: el conteo nodular (cantidad de nódulos por milímetro cuadrado) y la nodularidad (forma de los nódulos, correspondiendo un valor de nodularidad uno para nódulos equiaxiales).

Por otro lado, con el propósito de caracterizar los modelos numéricos se eligió un parámetro definido como el conciente entre el radio promedio de los nódulos y la distancia mínima promedio entre nódulos r/d . Este parámetro fue evaluado para un amplio rango de conteos nodulares en micrografías de ADI estándar de 60, 100, 150 y 600 nod/mm^2 y nodularidad uno⁷. Este análisis arrojó un valor promedio $r/d=0.25$. Así se generaron modelos en BEM con geometrías aleatorias y valores de r/d en rango de 0.1 a 0.4. Un modelo típico es ilustrado en la **Figura 1**, donde se esquematiza la localización de arreglos de puntos internos usados para el cálculo de tensiones. Cabe señalar que debido a las bajas propiedades mecánicas del grafito en los nódulos y por simplicidad computacional estos han sido considerados como agujeros.

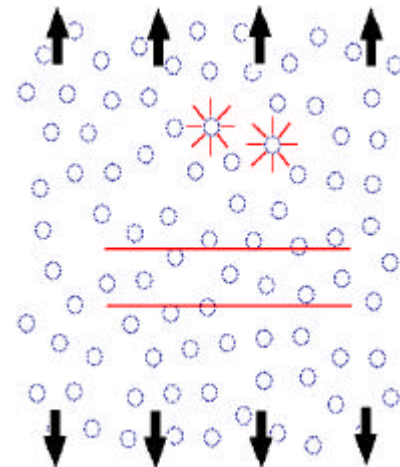


Figura 1: Modelo de la microestructura de ADI con arreglos de puntos internos

El análisis estadístico de los datos obtenidos mostró que:

- La distribución de la tensión principal máxima sobre la frontera de los nódulos coincide en promedio con la correspondiente a un agujero aislado en una placa infinita. Por ello, que la zona en la vecindad del ecuador del nódulo constituye un sitio preferencial para la iniciación de las microfisuras.
- El campo de tensión promedio en la vecindad de los nódulos coincide con caso de un agujero aislado, sin embargo, la desviación estándar incrementa con r/d . Para $r/d=0.25$ la desviación fue encontrada menor al 10% en la tensión principal máxima para distancias desde la superficie del nódulo de $x < r$. Estos valores incrementan hasta un 45% para $x=2r$.

- c) Existe una clara periodicidad en la tensión principal máxima a lo largo de direcciones perpendiculares a la carga aplicada. El período es igual a la distancia entre nódulos d .

A través del análisis de funciones de pesos usando los resultados de (b) y (c) se estimó la desviación en los valores del factor de intensidad de tensiones debido al efecto de los nódulos. Los resultados del análisis permitieron concluir:

- (i) El FIT para una fisura en un material homogéneo es mayor que el FIT para la misma fisura embebida en una microestructura ADI. La diferencia entre los dos valores depende fuertemente de la longitud de fisura $2a$. Esta diferencia es del orden del 10% para fisuras de longitud de $2a > 40d$. La desviación puede reducirse al 7% si se consideran fisuras de longitud $2a > 100d$.
- (ii) El FIT para microfisuras de longitud $c < r$ emanando de un nódulo en una microestructura ADI tiene una desviación estándar cerca al 10% alrededor del valor del FIT correspondiente a la misma microfisura emanando de un nódulo aislado. La desviación crece hasta un 20% para longitudes de microfisuras de $c = 2r$.

Los resultados anteriores serán considerados en la discusión de modelos de propagación introducidos en la siguiente sección.

Modelado de la propagación de fisuras por fatiga

La principal característica del micromecanismo de propagación de fisuras por fatiga en ADI fue enunciada en la Sección I. Para estudiar el efecto del cierre parcial de fisura sobre el mecanismo propuesto, primero se ha considerado un juego de modelos simples con una fisura principal y un nódulo con microfisuras. La geometría del modelo y la discretización, junto con los resultados de la propagación de fisuras para los tres niveles de closure es mostrada en la **Figura 2**. La longitud de la fisura principal es 40 veces la longitud de la microfisura. Las microfisuras fueron puestas y coinciden con los 'ecuadores' de los nódulos donde las tensiones principales son máximas. Las constantes del material para la ley de propagación son: $C = 4.43 \times 10^{-10}$, $m = 1.85$, $DK_{th} = 5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$.

Los niveles de closure considerados fueron $U=1$ (sin closure), $U=0.6$ y $U=0$, el último caso corresponde al límite para el cual la fisura principal no propaga. La **Figura 3** ilustra la evolución del rango del factor de intensidad de tensiones en función del número de ciclos de carga para los tres niveles de closure. El rango del factor de intensidad de tensiones DK está normalizado con

respecto a DK_{th} , de tal forma que para razones mayores que uno éste representa la propagación de fisuras, mientras que para valores menores que uno las fisuras no propagan. Nótese que cuando el vértice de fisura principal se acerca a la microfisura, el efecto de interacción causa un incremento sustancial en el DK en el vértice A , que propaga en el sentido inverso al crecimiento de fisura general hasta unirse a la fisura principal. El efecto de closure retrasa el proceso disminuyendo la tasa de avance de la fisura principal. Tan pronto como la fisura principal y la primera microfisura coalescen, la microfisura B que está sobre el lado opuesto del nódulo llega a hacer la fisura dominante, tomando el rol de fisura principal.

Los resultados para un caso general son dados en las **Figuras 4 y 5**. En este caso más de una microfisura propaga simultáneamente hacia el vértice de la fisura principal, induciendo el fenómeno de ramificación de fisuras o "branching". Este comportamiento justifica la presencia de las 'bifurcaciones' observadas durante los experimentos en el encuentro de la fisura principal con los nódulos.

La mayor simplificación en el análisis anterior es la inclusión en el modelo de un número limitado de nódulos, mientras que en práctica los nódulos están distribuidos sobre todo el dominio. Las desviaciones en el cómputo de los valores de DK debido a las simplificaciones anteriores fueron estimadas en la Sección anterior. Los efectos de estas desviaciones dependerán del nivel de tensión aplicada. Para niveles superiores de DK mayores que los valores de umbral DK_{th} las desviaciones no son significantes. Aunque ello podría afectar la tasa de avance general, pero no produciría el arresto de las fisuras. Por otro lado, para valores DK del mismo orden a DK_{th} los rangos de desviaciones son importantes y pueden situar a DK bajo los valores de umbral. Al mismo tiempo es importante considerar la naturaleza tridimensional del problema. Las fisuras largas o cortas tienen diferente comportamiento debido al tamaño relativo de sus frentes de fisura. La presencia de irregularidades causa un efecto más atenuado para un frente amplio que para un tamaño de frente reducido. Por ello, se puede decir que el incremento en el valor del factor de intensidad de tensiones calculado para la fisura principal presenta solamente un efecto local que podría ser casi imperceptible si solamente la presencia de un solo nódulo cerca del frente de la fisura es considerado. La tasa de propagación de la fisura principal corresponde a un promedio de todos los fenómenos que simultáneamente toma lugar a lo largo de toda la extensión del frente de fisura.

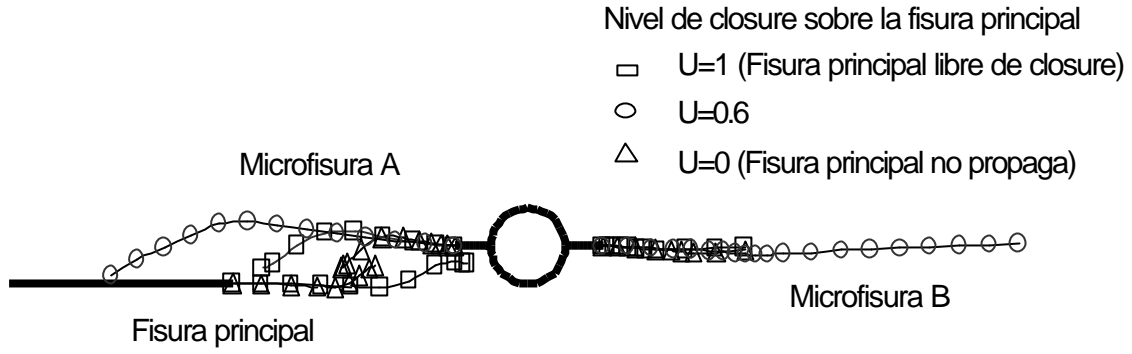


Figura 2: Efecto del nivel de closure sobre mecanismo de interacción fisura-microfisura

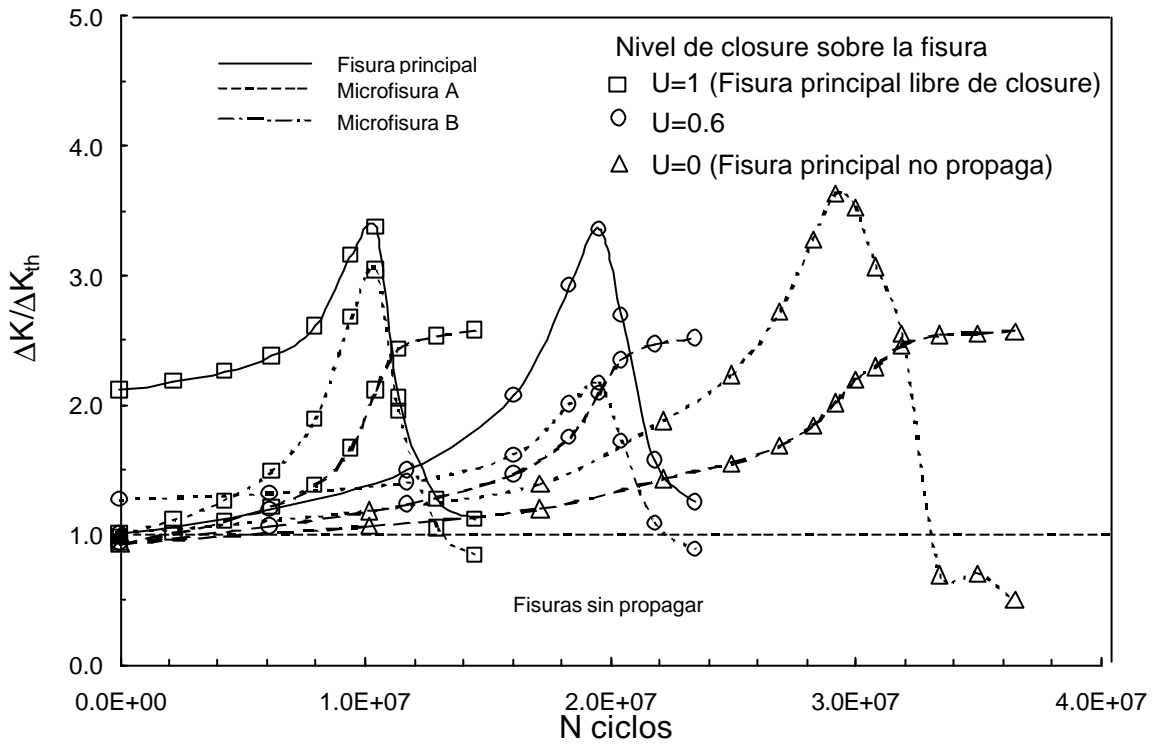


Figura 3: Efecto del nivel de closure sobre la evolución del factor de intensidad de tensiones

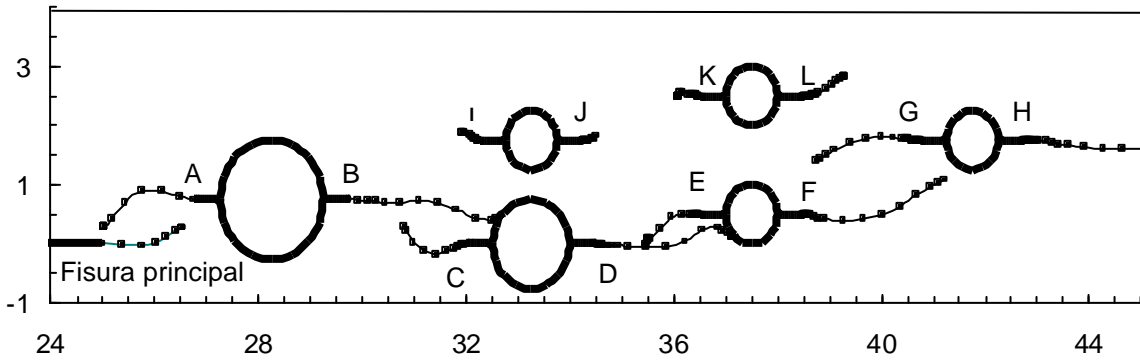


Figura 4: Evolución de la propagación de fisuras para un arreglo de nódulos general

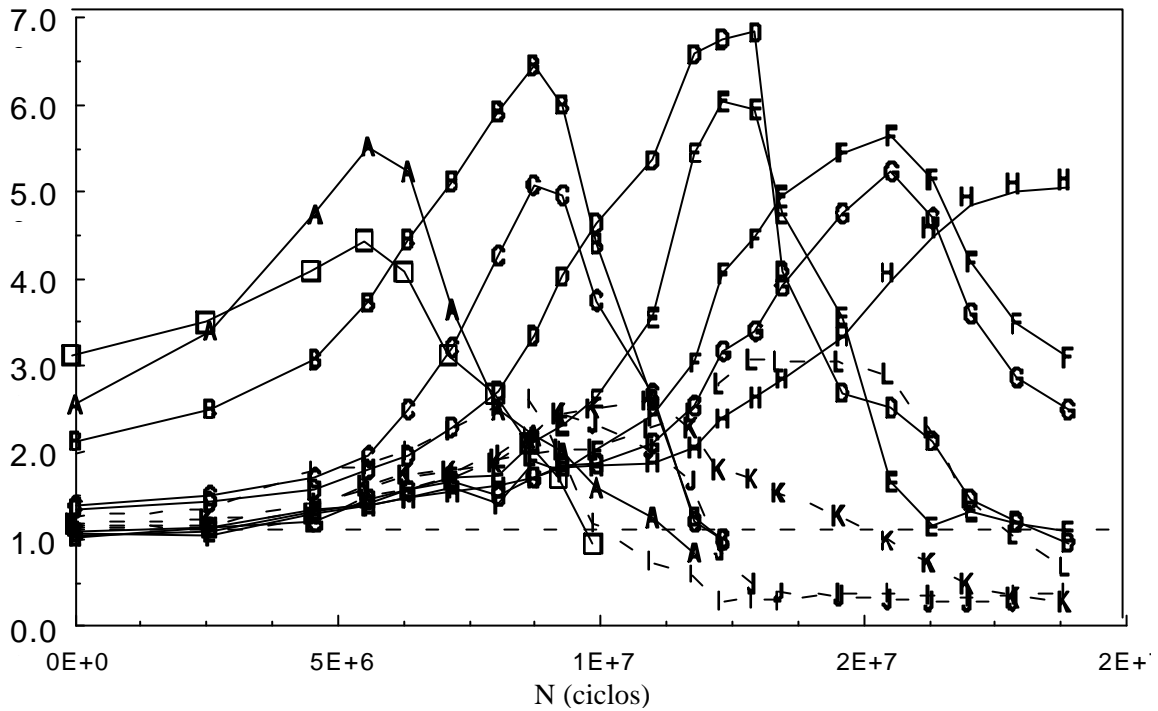


Figura 5: Evolución de ΔK para un arreglo de nódulo de la Figura 4.

El efecto de las microfisuras sobre la velocidad de propagación

Los resultados de los modelos numéricos están en concordancia con resultados experimentales en los que se observa que la propagación de una fisura por fatiga en ADI involucra la iniciación y propagación de numerosas microfisuras como consecuencia del encuentro de esta con los nódulos del grafito. De esta forma se puede identificar una zona microfisurada (zona de proceso) que acompaña al vértice de la fisura principal. El proceso de microfisurado de esta zona provoca un gasto extra de energía de fractura que permite explicar la reducción de su tasa de avance y el aumento del valor de umbral efectivo de propagación.

En lo que sigue se propone un modelo fractomecánico basado en la integral J para cuantificar el efecto de la zona microfisurada sobre la fisura principal. Se considera para ello en primer lugar el esquema de la Figura 6 donde se muestra una región múltiplemente conexas definida por los contornos C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 , este último rodeando una microfisura en la zona de proceso. Basándose en el teorema de la divergencia, Rice¹⁰ demostró que la J total sobre el contorno C es igual a la suma de la contribución de cada uno de sus segmentos, que para este caso puede escribirse

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 = 0 \quad (2)$$

donde $J_3=J_4=0$ si las tracciones son nulas en las caras de las fisuras.

Un análisis similar puede realizarse para el nódulo microfisurado. La Figura 7(a) ilustra los contornos cerrados definidos para ambos vértices de microfisura. Si las caras de la microfisura se encuentran libres de tensiones, ambos contornos pueden extenderse hasta formar un único contorno, como se ilustra en la Figura 7(b). La invariancia de la integral J se deduce entonces

$$J_5 = J_2 + J_2'' = J_1 + J_1'' \quad (3)$$

Combinando las expresiones (3) y (4) (es importante considerar los sentidos de circulación) y reformulando ahora el problema en términos de los factores de intensidad de tensiones puede escribirse

$$\frac{(1-n^2)K^2}{E} = \frac{(1-n^2)K_{tip}^2}{E} + 2 \frac{(1-n^2)K_m^2}{E} \quad (4)$$

donde K corresponde al factor de intensidad de tensiones asociado al valor de J_1 y K_{tip} a J_2 , mientras que K_m corresponde a cada uno de los vértices de la microfisura. La expresión (4) puede ser utilizada para determinar el valor de K_{tip} una vez conocidos los valores de K y K_m . Así mismo la extensión de (4) al caso de N microfisuras resulta inmediata.

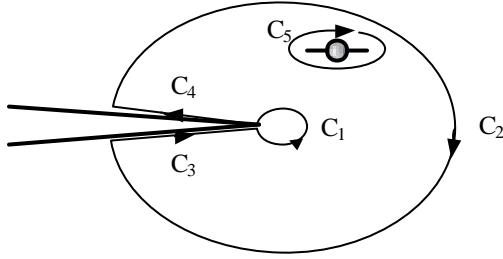


Figura 6: contornos para el cálculo de la integral J

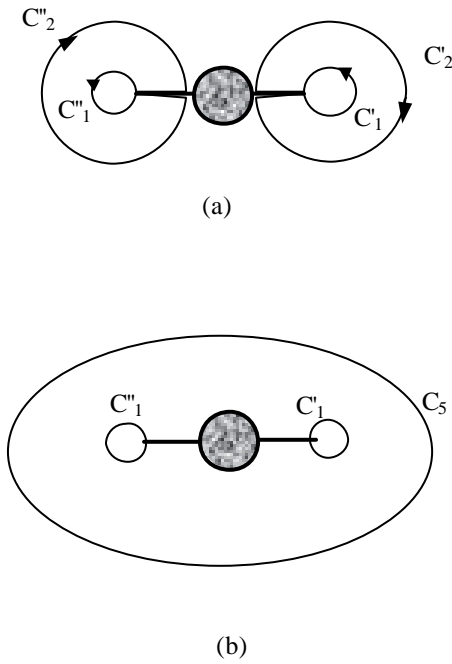


Figura 7: contornos para el cálculo de J en las microfisuras

Con el objeto de resolver (4) se propone en primer lugar una zona de proceso dada por el lugar geométrico en el cual el nivel de DK_m para las fisuras que emanan de los nódulos se encuentra por encima del valor umbral de propagación DK_{th} (la equivalencia entre K y DK es válida para una carga cíclica con $R=0$). Dicho de otro modo, esto significa considerar una zona de proceso dada por las microfisuras que propagan por fatiga a partir de los iniciadores naturales dados por las discontinuidades en la superficie de los nódulos.

Considerando un nódulo con dos fisuras ecuatoriales de longitud c , el valor de DK está dado por

$$\Delta K_m = \Delta S \cdot Y \sqrt{pc} \quad (5)$$

donde Y es un factor geométrico que depende de la relación entre la longitud de la microfisura y radio del nódulo c/r . A partir de la expresión (5), el valor de \bar{DS} para alcanzar DK_{th} puede determinarse como

$$\Delta S = \frac{\Delta K_{th}}{Y \sqrt{pc}} \quad (6)$$

La extensión de la zona de proceso r_p puede ser calculada siguiendo un procedimiento similar al utilizado para calcular la zona plástica¹⁰: se sustituye (6) en la expresión del campo de tensiones alrededor del vértice de fisura principal para el caso de deformación plana y resolviendo para r_p

$$r_p(q) = \frac{1}{4p} \left(\frac{\Delta K_{tip}}{\Delta K_{th}} \right)^2 \left[(1-2n)^2 (1 + \cos q) + \frac{3}{2} \sin^2 q \right] \quad (7)$$

La superficie A de la zona de proceso puede determinarse utilizando la expresión

$$A = \int_0^{2p} \int_0^{r_p} r \cdot dr \cdot dq \quad (8)$$

que junto con el conteo nodular permite determinar el número de nódulos N en la zona de proceso.

Suponiendo como primera aproximación que todas las fisuras dentro de la zona de proceso tienen un nivel del factor de intensidad de tensiones igual al DK_{th} , de la expresión (4) entonces

$$\Delta K^2 = \Delta K_{tip}^2 + 2N \Delta K_{th}^2 \quad (9)$$

El proceso anterior no puede llevarse a cabo en forma directa, ya que el valor N es función de DK_{tip} . La expresión (9) debe resolverse mediante un proceso iterativo, en el que se ensayan valores de K_{tip} hasta que se satisface con una tolerancia prescrita en el sistema dado por las expresiones (5) a (9).

El procedimiento antes expuesto fue aplicado para el caso de ADI considerando conteos nodulares entre 0 y 500 nódulos por mm^2 para nódulos de radio $r=5\mu m$. Se consideraron microfisuras con longitudes $c=r/2$, $c=r$ y $c=2r$, mientras que los valores de DK aplicado tomaron valores de $DK=2DK_{th}$, $DK=5DK_{th}$ y $DK=7DK_{th}$. Los resultados obtenidos están compilados en la **Figura 8**, donde se grafica la razón DK_{tip}/DK en función del conteo nodular para cada uno de los casos analizados. Puede observarse como la razón DK_{tip}/DK disminuye en forma importante con el DK aplicado y la longitud de las microfisuras. El efecto del conteo nodular no es tan marcado. Nótese el importante papel que juega esta disminución del rango del factor de intensidad de tensiones efectivo sobre la tasa de propagación de la fisura da/dn , al variar esta última aproximadamente con el cubo del rango del factor de intensidad de tensiones aplicado. Así por ejemplo, $DK_{tip}/DK=0.8$ disminuye a la mitad la tasa de propagación, mientras que valores de alrededor de $DK_{tip}/DK=0.6$ producen una reducción del 80%.

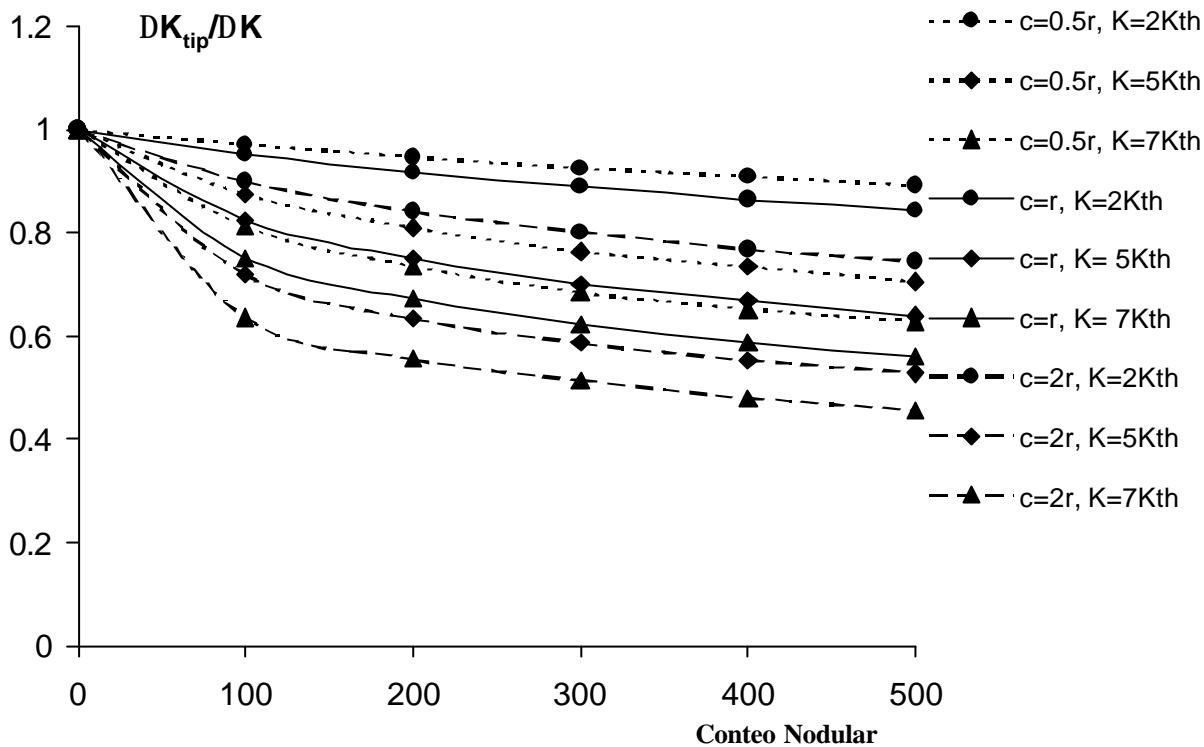


Figura 8: Influencia de la microfisuración sobre el ΔK efectivo de la fisura principal

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un estudio numérico y fractomecánico del mecanismo de propagación de fisuras por fatiga en materiales microfisurados, con aplicación a las fundiciones nodulares austemperizadas (ADI). El Método Dual de los Elementos de Contorno (DBEM) permitió estimar con exactitud los efectos de “crack closure” y la interacción entre fisuras, microfisuras y nódulos de grafitos, sobre el mecanismo. Se observa que las fisuras propagadas por fatiga en ADI siguen un camino preferencial a través de los nódulos, es decir que la fisura principal en su camino de propagación “busca” a los nódulos.

Los efectos de tamaño y distribución de nódulos sobre los mecanismos de propagación fueron considerados estimando las desviaciones de los valores del factor de intensidad de tensiones (ΔK) para fisuras y microfisuras a través del análisis de tensiones en la microestructura del ADI. Para fisura largas se encontró una clara periodicidad en el campo de tensiones, resultando que para fisuras embebidas en una matriz ADI los ΔK son menores que el caso de un material homogéneo. Por otro lado, los niveles del ΔK para microfisuras que emanan de los nódulos de grafito corresponden en promedio al caso de una fisura emanando de un agujero aislado, con una desviación estándar del 10% para longitudes de fisuras de hasta un radio de nódulo.

Los resultados de los modelos numéricos están en concordancia con resultados experimentales en los que se observa que la propagación de una fisura por fatiga en

ADI involucra la iniciación y propagación de numerosas microfisuras como consecuencia del encuentro de esta con los nódulos del grafito. De esta forma se puede identificar una zona microfisurada (zona de proceso) que acompaña al vértice de la fisura principal. El proceso de microfisurado de esta zona provoca un gasto extra de energía de fractura que permite explicar la reducción de su tasa de avance y el aumento del valor de umbral efectivo de propagación.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina (CONICET) y a la Organización de Estados Americanos (OEA) por el financiamiento del presente trabajo. Asimismo al Dr. Enrique Pardo por sus importantes contribuciones.

REFERENCIAS

1. B. Budiansky y R.J. O'Connell, “Elastic moduli of a cracked solid”, *Int. J. Solids Structures*, 12 (1976), 81
2. A.G. Evans y K.T. Faber, “Crack-growth resistance of microcracking brittle solids”, *J. Am. Ceram. Soc.*, 67, (1983), 255
3. A. Chudnovsky y W. Shaofu, “Effect of crack-microcracks interaction on energy release rates”, *Int. J. of Fracture*, 44 (1990), 43-56

4. N. Laws, "The effect of microcracks on energy density", en *Mechanics and Physics of Energy Density*, G.C.Sih y E.E. Gdoutos (Eds). Kluwer Academic Publishers, 1992
5. M. Kachanov y E.Montagut, "Interaction of a crack with certain microcrack arrays", *Engng. Fract. Mech.*, 25 56, 625-636, 1986.
6. A.A. Rubinstein, "Macrocrack interaction with semi-infinite microcrack array", *Int. J. of Fracture*, 27, 113-119, (1985)
7. G.L. Greno, J. L. Otegui and R.E. Boeri, "Mechanisms of fatigue crack growth in Austempered Ductile Iron", *Int. J. of Fatigue*, Vol. 21, pp. 35-43, (1999)
8. A. Portela, M.H. Aliabadi and D.P. Rooke, "Dual boundary element incremental analysis of crack propagation", *Computers & Structures*, Vol. 46/2, pp. 237-247, (1993)
9. J. Ortiz, "Modelado computacional de la propagación de fisuras por fatiga en materiales microfisurados", Tesis de maestría, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, (2000).
10. Kanninen and Popelar, *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford Engineering Science Series, Oxford, UK, (1985).
11. M. Klesnil M, and P. Lukas, "Influence of strength and stress history on growth and stabilisation of fatigue cracks", *Engng. Fract. Mech.*, 4, 77-92, (1972)
12. W. Elber, "The significance of fatigue crack closure", *Damage Tolerance in Aircraft Structures*, ASTM STP 486, 230-247, (1971.)
13. B.N. Leis, A.T. Hoper and J. Ahmad, "Critical review of the fatigue growth of short cracks", *Engng. Fract. Mech.*, 23(25), 883-898,(1986)